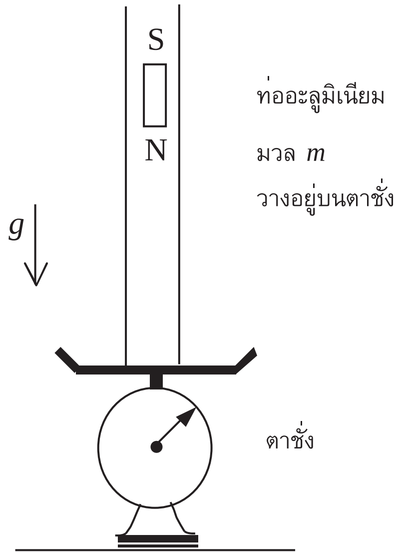
เฉลยข้อสอบวิชาฟิสิกส์ ภาคทฤษฎี

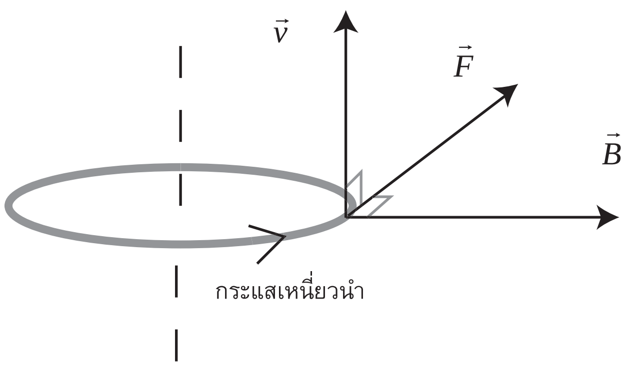
วันเสาร์ที่ 25 สิงหาคม 2544 เวลา 9.00 - 12.00 น.

ข้อ 1.



ขณะที่แท่งแม่เหล็กตกลงในแนวดิ่งภายในท่ออะลูมิเนียม เราอาจมองว่าท่ออะลูมิเนียมประกอบด้วยวงแหวนอะลูมิเนียมซ้อนกันอยู่ก็ได้ เมื่อแท่งแม่เหล็กพุ่งผ่านวงแหวนแต่ละวง ฟลักซ์แม่เหล็กที่สอดผ่านวงแหวนมีค่าเปลี่ยนไป และด้วยกฎการเหนี่ยวนำอีเอ็มเอฟ (แรงเคลื่อนไฟฟ้า) ของฟาราเดย์ เรารู้ว่าจะมีกระแสไหลวนในวงแหวน และจากกฎของเลนซ์ เรารู้ว่าทิศการไหลของกระแสจะเป็นทิศที่ทำให้เกิดการต้านการเปลี่ยนแปลง นั่นคือกระแสจะไหลในทิศที่ทำให้เกิดสนามแม่เหล็กที่ต้านการเคลื่อนที่ของแท่งแม่เหล็กที่กำลังตกลงมา ดังนั้นจะมีแรงแม่เหล็กที่ท่อกระทำต่อแท่งแม่เหล็ก ทำให้แท่งแม่เหล็กเคลื่อนที่ลงมาด้วยความเร่งน้อยกว่าที่ตกลงมาภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลกอย่างเดียว คำตอบก็คือแท่งแม่เหล็กตกลงมาด้วยความเร่งขนาดน้อยกว่า g

ในทางกลับกัน โดยใช้หลักการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ แทนที่เราจะมองว่าแท่งแม่เหล็กตกลงมาในท่อที่อยู่นิ่ง เราอาจมองว่าท่อกำลังเคลื่อนที่ขึ้นผ่านสนามแม่เหล็กจากแท่งแม่เหล็กที่อยู่นิ่ง ในมุมมองนี้ ประจุไฟฟ้าในท่ออะลูมิเนียมกำลังเคลื่อนที่ขึ้นผ่านสนามแม่เหล็ก องค์ประกอบของสนามแม่เหล็กในทิศตั้งฉากกับการเคลื่อนที่จะผลักประจุให้เคลื่อนที่ไหลวนรอบท่ออะลูมิเนียมเกิดเป็นกระแสไฟฟ้าไหลวนรอบท่อ



กระแสไฟฟ้าที่ไหลวนนี้ทำให้เกิดสนามแม่เหล็กที่ผลักแท่งแม่เหล็กในทิศขึ้น

ขณะที่แท่งแม่เหล็กตกลงมาด้วยความเร่ง ความเร็วของแท่งแม่เหล็กจะมากขึ้นเรื่อย ๆ อัตราการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์แม่เหล็กที่ตัดผ่านผนังท่ออะลูมิเนียมจะมากขึ้นเรื่อย ๆ กระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำจะมีค่ามากขึ้น และแรงแม่เหล็กต้านการเคลื่อนที่ของแท่งแม่เหล็กจะมากขึ้น ทำให้ความเร่งสุทธิมีขนาดน้อยลง ในที่สุดที่ความ

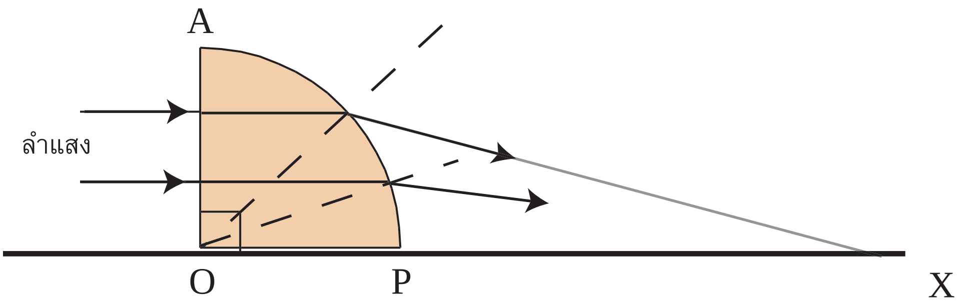
ปิยพงษ์ สิทธิคง ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล scpst@mahidol.ac.th, http://mpec.sc.mahidol.ac.th

เร็วขนาดหนึ่งแรงต้านจะมีขนาดเท่ากับน้ำหนักของแท่งแม่เหล็กพอดี ความเร่งสุทธิจะเป็นศูนย์และแท่งแม่เหล็กจะตกต่อไปด้วยความเร็วสุดท้ายที่มีขนาดคงที่ (เราสมมุติว่าท่ออะลูมิเนียมยาวมากพอที่จะเกิดสถานการณ์นี้ได้)

เมื่อมีแรงแม่เหล็กที่ท่อกระทำต่อแท่งแม่เหล็กในทิศขึ้น ก็ต้องมีแรงปฏิกิริยาที่แท่งแม่เหล็กกระทำต่อท่ออะลูมิเนียมในทิศลง แรงนี้กดท่ออะลูมิเนียมเพิ่มเติมจากน้ำหนักของท่อ ดังนั้นตาชั่งจะแสดงน้ำหนักของท่ออะลูมิเนียมมากกว่า mg ในกรณีที่ท่อยาวมาก เมื่อแท่งแม่เหล็กกำลังตกลงมาด้วยความเร็วสุดท้าย ตาชั่งจะอ่านค่าเท่ากับน้ำหนักของท่อบวกกับน้ำหนักของแท่งแม่เหล็ก

ข้อ 2.

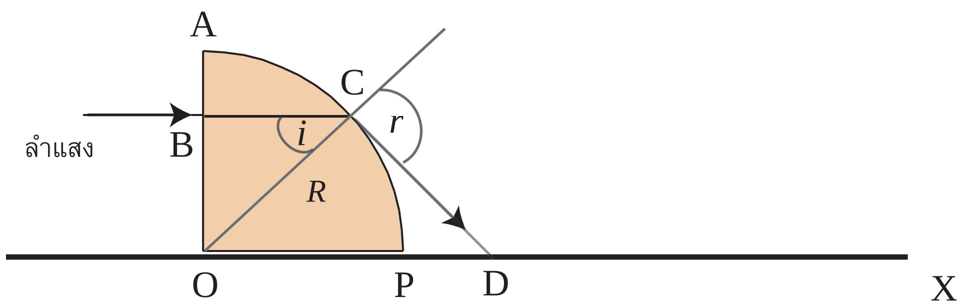
โจทย์ถามเงื่อนไขเกี่ยวกับตำแหน่งที่ลำแสงตกกระทบด้าน OA ที่ทำให้มีลำแสงหักเหผ่านผิวโค้ง AP ออกมา โดยทั่วไปเมื่อมีลำแสงตกกระทบรอยต่อระหว่างตัวกลาง จะมีลำแสงหักเหผ่านจากตัวกลางหนึ่งไปยังอีกตัวกลางหนึ่ง ยกเว้นกรณีที่แสงเดินทางจากตัวกลางที่มีดรรชนีหักเหสูงไปยังตัวกลางที่มีดรรชนีหักเหต่ำและมุมตกกระทบโตกว่ามุมวิกฤติ ดังนั้นปัญหานี้คงเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งที่แสงตกกระทบที่ผิว OA กับขนาดของมุมตกกระทบที่ผิวโค้ง AP ลองวาดรูปดูว่าลำแสงที่ตกกระทบด้าน OA ณ ตำแหน่งที่ต่างกันมีผลต่อมุมตกกระทบที่ผิวโค้งอย่างไร รูปที่วาดแสดงให้เห็นข้างล่างนี้



จากรูปเรามองเห็นได้ชัดเจนว่า ถ้าลำแสงตกกระทบที่ความสูงมากกว่า มุมตกกระทบที่ผิวโค้งจะโตกว่า ดังนั้นเมื่อเพิ่มความสูงขึ้นไปเรื่อย ๆ จะมีตำแหน่งหนึ่งที่มุมตกกระทบมีขนาดเท่ากับมุมวิกฤติพอดี ลำแสงที่ตกกระทบเหนือตำแหน่งนั้นจะสะท้อนกลับหมดที่ผิวโค้ง จะไม่มีลำแสงหักเหผ่านออกมา ส่วนลำแสงที่ตกกระทบต่ำกว่าจุดนั้นจะหักเหออกมาด้วยมุมหักเหที่โตกว่ามุมตกกระทบ และเนื่องจากลำแสงตกกระทบในแนวระดับ ลำแสงที่หักเหออกมาจะเบนเข้าหาเส้น OX เสมอ และจะเบนเข้าหามากสุดเมื่อมุมหักเหโตสุดเท่ากับมุมฉาก ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อมุมตกกระทบที่ผิวโค้งเป็นมุมวิกฤติ

ปิยพงษ์ สิทธิคง ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล scpst@mahidol.ac.th, http://mpec.sc.mahidol.ac.th

ให้ B เป็นตำแหน่งที่ทำให้มุมตกกระทบที่ผิวโค้งเป็นมุมวิกฤติพอดี ในกรณีนี้ลำแสงที่หักเหออกมาจะมีมุมหักเหเท่ากับมุมฉากพอดี นั่นคือลำแสงจะออกมาในแนวสัมผัสกับผิวโค้งดังรูปข้างล่าง



ตำแหน่ง B หาได้จากความสูง OB ของสามเหลี่ยมมุมฉาก OBC ความสูงนี้ขึ้นกับมุม i ซึ่งหาได้จากกฎของสเนลล์

$$n_{\mathrm{g}} \sin i = n_{\mathrm{a}} \sin r$$

โดยที่ $n_{\mathrm{g}} = n$ และ $n_{\mathrm{a}} = 1$ เป็นดรรชนีหักเหของแก้วและอากาศตามลำดับ ในกรณีที่มุมตกกระทบที่ผิวโค้งเป็นมุมวิกฤติ $i = i_{\mathrm{c}}$ มุมหักเหมีค่า $r = 90^\circ$ เมื่อแทนค่าในกฎของสเนลล์ เราจะได้ว่า

$$\sin i_{\mathrm{c}} = \frac{\sin 90^\circ}{n} = \frac{1}{n}$$

เนื่องจาก $\mathrm{OB} = R \sin i_{\mathrm{c}} = R/n$ ดังนั้นถ้าต้องการให้มีลำแสงหักเหผ่านออกมาจากผิวโค้ง AP ลำแสงต้องตกกระทบผิว OA ต่ำกว่าจุด A เป็นระยะอย่างน้อยเท่ากับ $\mathrm{AB} = \mathrm{OA} - \mathrm{OB} = R - R\sin i_c = (1 - 1/n)R$

เราหาตำแหน่ง D ที่ลำแสงตกกระทบพื้นได้ถ้าเรารู้ระยะ OD เราหาระยะนี้ได้จากข้อสังเกตที่ว่าในกรณีที่แสงตกกระทบผิวโค้งด้วยมุมวิกฤติ สามเหลี่ยม OCD เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และมุม $\mathrm{D\hat{O}C}$ มีขนาดเท่ากับมุมวิกฤติ i_{c} (ลำแสงตกกระทบขนานกับแนวระดับ)

$$\mathrm{OD} = \frac{\mathrm{OC}}{\cos i_{\mathrm{c}}} = \frac{R}{\sqrt{1 - \sin^2 i_{\mathrm{c}}}} = \frac{R}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{n^2}}} = \frac{nR}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

ดังนั้นลำแสงกระทบพื้นห่างจากจุด P ไปทางขวาเป็นระยะทางอย่างน้อยที่สุดเท่ากับ

$$\mathrm{PD} = \mathrm{OD} - R = \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1\right) R$$

ปิยพงษ์ สิทธิคง ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล scpst@mahidol.ac.th, http://mpec.sc.mahidol.ac.th

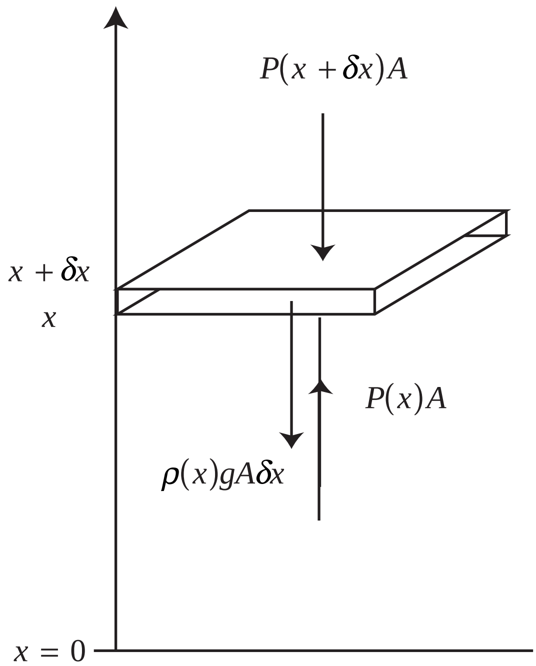
ข้อ 3.

เมื่อให้ความร้อน δQ แก่ระบบแก๊ส ๆ จะขยายตัว สมมุติว่าแก๊สขยายตัวมีปริมาตรเพิ่มขึ้น δV แก๊สจะทำงานต่อสิ่งแวดล้อมเท่ากับ $W = P\delta V$ เพราะว่าความดัน P มีค่าคงที่ ความร้อนทำให้ระบบมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นด้วย สมมุติให้อุณหภูมิเพิ่มขึ้น δT อุณหภูมิที่เพิ่มขึ้นนี้สัมพันธ์กับปริมาตรที่เพิ่มขึ้นตามกฎของแก๊สอุดมคติ $PV = nRT \Rightarrow P\delta V = nR\delta T$

เนื่องจากพลังงานภายใน U ของแก๊สอุดมคติขึ้นกับอุณหภูมิของแก๊สตามความสัมพันธ์ $U = \frac{3}{2}nRT$ ดังนั้น $\delta U = \frac{3}{2}nR\delta T$ นอกจากนี้ ความร้อน δQ ที่ใส่ให้กับระบบ พลังงานภายใน δU ของระบบ และงาน W ที่ระบบทำต่อสิ่งแวดล้อมมีความสัมพันธ์กันตามกฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์ $\delta Q = \delta U + W$ ดังนั้นเราได้ว่า $\delta Q = \frac{3}{2}nR\delta T + P\delta V = \frac{3}{2}P\delta V + P\delta V = \frac{5}{2}P\delta V$

1. งานที่ระบบทำต่อสิ่งแวดล้อมจึงมีค่า $W = P\delta V = \frac{2}{5}\delta Q$
2. พลังงานภายในของแก๊สเพิ่มขึ้น $\delta U = \frac{3}{2}nR\delta T = \frac{3}{2}P\delta V = \frac{3}{2}\times\frac{2}{5}\delta Q = \frac{3}{5}\delta Q$
3. อุณหภูมิของแก๊สเพิ่มขึ้น $\delta T = \frac{P\delta V}{nR} = \frac{2}{5}\frac{\delta Q}{nR}$

ข้อ 4.



ให้ x เป็นความสูงวัดจากระดับน้ำทะเลขึ้นไป พิจารณาชั้นอากาศระหว่างความสูง x และ $x+\delta x$ ให้ $\rho(x)$ เป็นความหนาแน่นอากาศที่ความสูง x ชั้นอากาศอยู่ในสภาพสมดุล ดังนั้นจากกฎของนิวตันข้อที่สอง แรงเนื่องจากความดันด้านล่างที่ดันขึ้นต้องมีขนาดเท่ากับน้ำหนักชั้นอากาศบวกกับแรงเนื่องจากความดันด้านบนที่ลงมา

$$P(x)A = P(x+\delta x)A + \rho(x)gA\delta x$$

โดยที่ A คือพื้นที่ตัดขวางของชั้นอากาศ $P(x)$ และ $P(x+\delta x)$ คือความดันที่ความสูง x และ $x+\delta x$ ตามลำดับ จากสมการข้างบน เราได้ว่า

$$\delta P \equiv P(x+\delta x) - P(x) = -\rho(x)g\delta x$$

ปิยพงษ์ สิทธิคง ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล scpst@mahidol.ac.th, http://mpec.sc.mahidol.ac.th

โจทย์ให้สมมุติว่าบรรยากาศของเราประกอบด้วยแก๊สอุดมคติที่อุณหภูมิคงที่ T ดังนั้น

$$PV = nRT \quad \Rightarrow \quad P = \frac{n\mu}{V}\frac{1}{\mu}RT = \frac{M}{V}\frac{1}{\mu}RT = \frac{\rho RT}{\mu}$$

โดยที่ μ เป็นมวลของแก๊ส 1 โมล ความหนาแน่นอากาศจึงสัมพันธ์กับความดันอากาศที่ความสูงเดียวกันตามสมการ $\rho(x) = \frac{\mu}{RT}P(x)$ เมื่อเอา $\rho(x) = \frac{\mu}{RT}P(x)$ ไปแทนค่าในสมการ $\delta P = -\rho(x)g\delta x$ เราจะได้ว่า

$$\delta P = -\frac{\mu g}{RT}P(x)\delta x$$

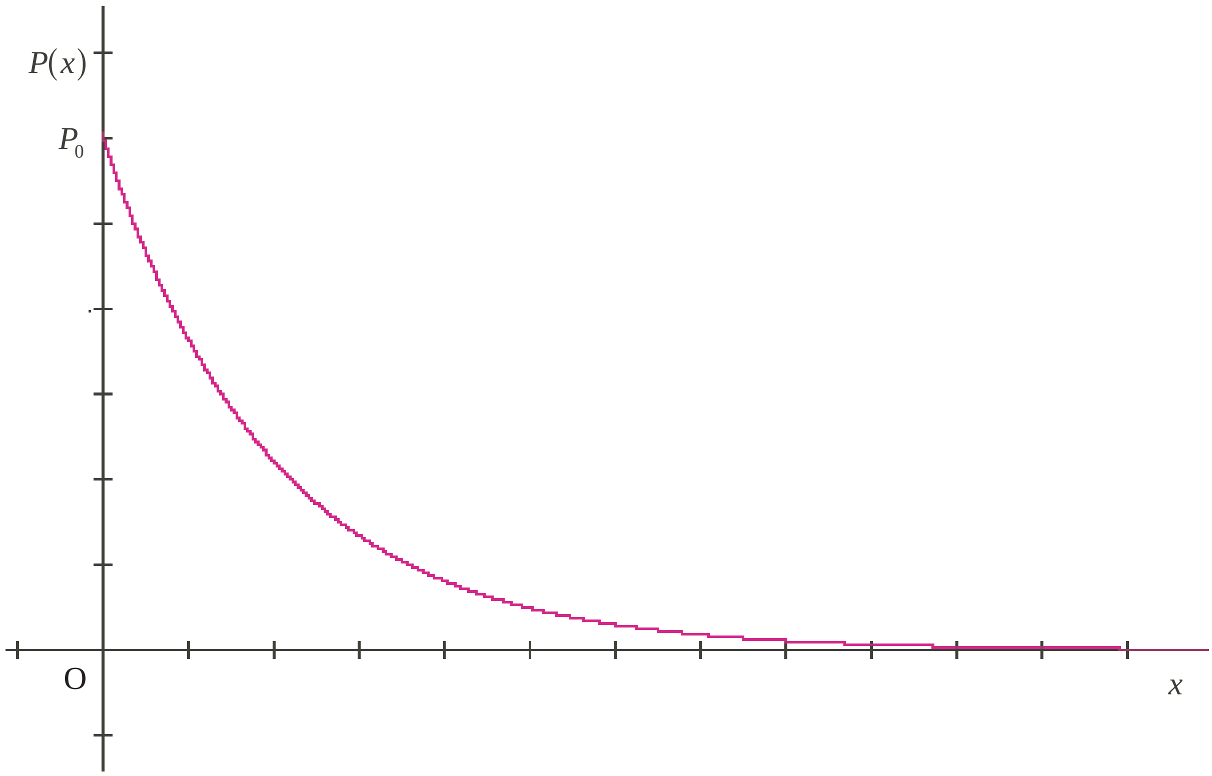
โจทย์กำหนดว่า ถ้า $\delta y = -\lambda y\,\delta x$ แล้ว จะได้ว่า y = (ค่าคงที่) $e^{-\lambda x}$ ดังนั้นคำตอบของสมการข้างบนคือ

$$P(x) = Ce^{-\frac{\mu g}{RT}x}$$

โดยที่ C เป็นค่าคงที่ ที่ระดับน้ำทะเลที่ $x = 0$ ความดันมีค่าเท่ากับ P_0 ดังนั้น เมื่อแทนค่า $x = 0$ ในสมการบน เราจะได้ว่า $P_0 = P(x=0) = Ce^{-\frac{\mu g}{RT}0} \quad \Rightarrow \quad C = P_0$

ดังนั้น
$$P(x) = P_0e^{-\frac{\mu g}{RT}x}$$

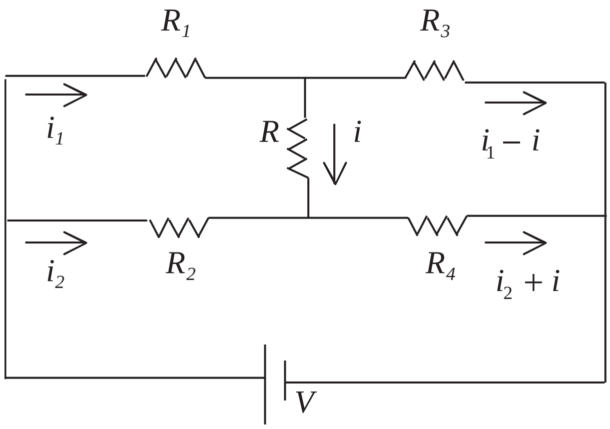
รูปข้างล่างแสดงกราฟของความดันเทียบกับความสูงจากระดับน้ำทะเล



ปิยพงษ์ สิทธิคง ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล scpst@mahidol.ac.th, http://mpec.sc.mahidol.ac.th

ข้อ 5.

วงจรที่ให้วิเคราะห์เป็นวีทสโตนบริดจ์ (Wheatstone bridge) เราจะใช้กฎของ Kirchhoff วิเคราะห์ปัญหา กฎเกี่ยวกับการคงตัวของประจุไฟฟ้าที่ว่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลเข้าชุมทางมีค่าเท่ากับกระแสที่ไหลออกจะให้กระแสในวงจรดังรูปข้างล่าง



กฎของ Kirchhoff ข้อที่ว่าผลบวกของความต่างศักย์คร่อมชิ้นอุปกรณ์ในวงกระแสต้องเป็นศูนย์ จะให้

$$-i_1R_1 - (i_1 - i)R_3 + V = 0 \qquad (1)$$

$$-i_2R_2 - (i_2 + i)R_4 + V = 0 \qquad (2)$$

$$-i_1R_1 - iR + i_2R_2 = 0 \qquad (3)$$

จากสมการ (1) และ (2) เราได้ $i_1 = \dfrac{V + iR_3}{R_1 + R_3}$ และ $i_2 = \dfrac{V - iR_4}{R_2 + R_4}$ ตามลำดับ แทนค่าที่ได้นี้ลงในสมการ (3) จะให้

$$-\frac{V + iR_3}{R_1 + R_3}R_1 - iR + \frac{V - iR_4}{R_2 + R_4}R_2 = 0$$

เมื่อจัดรูปสมการเสียใหม่ เราจะได้กระแส i ที่ต้องการ

$$i = \left\{\frac{R_2R_3 - R_1R_4}{R(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_1R_3(R_2 + R_4) + R_2R_4(R_1 + R_3)}\right\}V$$

สังเกตว่า เมื่อ $R_2R_3 = R_1R_4$ กระแส i จะมีค่าเป็นศูนย์เสมอไม่ว่า R จะมีค่าเท่าใด

ปิยพงษ์ สิทธิคง ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล scpst@mahidol.ac.th, http://mpec.sc.mahidol.ac.th

ข้อ 6.

ให้ P_0 เป็นความดันปรกติ ณ จุดสังเกตเมื่อยังไม่มีคลื่นเสียงใด ๆ มา เมื่อมีคลื่นเสียงมาความดัน ณ จุดนั้นจะมีค่าเท่ากับผลบวกของความดันเดิมกับความดันเนื่องจากคลื่นเสียงที่มาถึง

$$\begin{aligned} P &= P_0 + P_1 + P_2 \\ &= P_0 + P_1 = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}x - 2\pi f_1 t\right) + A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_2}x - 2\pi f_2 t\right) \\ &= P_0 + A\left[\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}x - 2\pi f_1 t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_2}x - 2\pi f_2 t\right)\right] \end{aligned}$$

เสียงที่เราได้ยินเป็นผลมาจากความดันที่เปลี่ยนไปจากความดันปรกติ

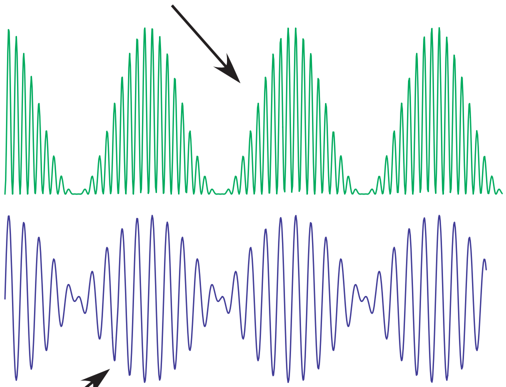
$$\begin{aligned} \Delta P &= P - P_0 \\ &= A\left[\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}x - 2\pi f_1 t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_2}x - 2\pi f_2 t\right)\right] \end{aligned}$$

โดยการใช้เอกลักษณ์ $\sin X + \sin Y \equiv 2\sin\left(\frac{X+Y}{2}\right)\cos\left(\frac{X-Y}{2}\right)$ ความดันที่จุด $x = a$ มีค่า

$$\begin{aligned} \Delta P &= P(a) - P_0 \\ &= 2A\sin\left\{\pi a\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) - 2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t\right\}\cos\left\{\pi a\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) - 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right\} \\ &= \left[2A\cos\left\{\pi a\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) - 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right\}\right]\sin\left\{\pi a\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) - 2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t\right\} \end{aligned}$$

ถ้าความถี่ f_1 และ f_2 มีค่าใกล้กัน เรามองได้ว่า ΔP มีการเปลี่ยนแปลงกับเวลาแบบฟังก์ชันรูปไซน์ ตามพจน์ $\sin\left\{\pi a\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) - 2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t\right\}$ ด้วยความถี่ $(f_1 + f_2)/2$ โดยที่แอมพลิจูดเปลี่ยนไปตามเวลาตามพจน์ $2A\cos\left\{\pi a\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) - 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right\}$ ด้วยความถี่ $(f_1 - f_2)/2$ หรือ $(f_2 - f_1)/2$ แล้วแต่ว่า $f_1 > f_2$ หรือ $f_2 > f_1$ แต่สิ่งที่มีผลต่อการได้ยินจริง ๆ ความเข้มของเสียงซึ่งแปรผันตรงกับกำลังสองของ "แอมพลิจูด"ของคลื่นความดันที่เปลี่ยนไป

รูปข้างล่างแสดงให้เห็นกราฟของฟังก์ชันคลื่นเสียงและค่ากำลังสองของฟังก์ชัน



$$\Delta P = A\left[\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}x - 2\pi f_1 t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_2}x - 2\pi f_2 t\right)\right]$$

เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของ"แอมพลิจูด"หนึ่งรอบ นอกจากตอนที่"แอมพลิจูด"เป็นบวกแล้ว ตอนที่ "แอมพลิจูด"มีค่าเป็นลบสูงสุด ค่ากำลังสองก็มีค่าเป็นบวกด้วย ทำให้ได้ยินเสียงดังสองครั้งในหนึ่งรอบของการเปลี่ยนแปลงแอมพลิจูด ดังนั้นคนจะได้ยินเสียงดังค่อย ๆ ด้วยความถี่ $f_1 - f_2$ หรือ $f_2 - f_1$ แล้วแต่ว่า $f_1 > f_2$ หรือ $f_2 > f_1$

สรุปก็คือ คนจะได้ยินเสียงความถี่ $(f_1 + f_2)/2$ ที่ดังค่อย ๆ $|f_2 - f_1|$ ครั้งต่อวินาที

+++++++++++++++++++++++++++++++++

ปิยพงษ์ สิทธิคง ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล scpst@mahidol.ac.th, http://mpec.sc.mahidol.ac.th