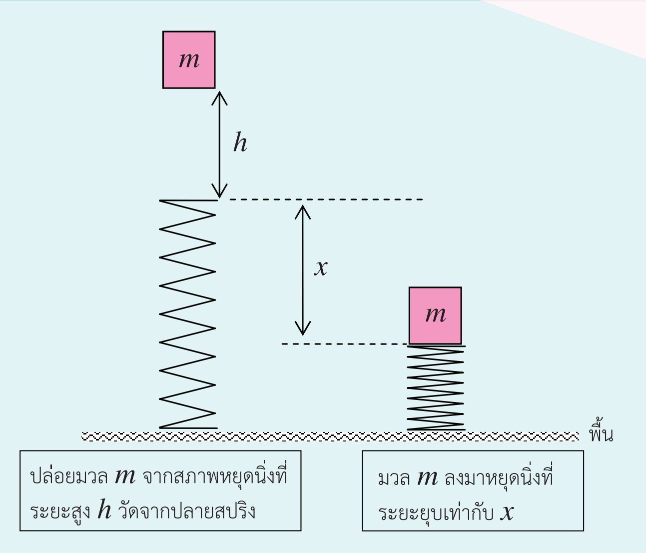
# Misconceptual Physics
# เรื่อง การหาระยะยุบของสปริง จากการปล่อยตกของมวลในแนวดิ่ง

**ผศ. ดร.สมชาย เกียรติกมลชัย** ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## สถานการณ์

สปริงตั้งอยู่ในแนวดิ่ง มีค่านิจสปริงเป็น $k$ N/m ปล่อยก้อนมวล $m$ จากระยะสูง $h$ วัดจากปลายด้านบนของสปริง ก้อนมวล $m$ ตกลงที่ปลายสปริงและอัดสปริงลงไป อยากทราบระยะยุบสูงสุดของสปริง




## เนื้อความ

หากถามคำถามนี้กับนิสิต นักศึกษา หรือนักเรียนมัธยมปลายจำนวนมาก (หรือแม้แต่คุณครู) ก็จะได้คำตอบที่ว่า ระยะ $x$ ดังกล่าวสามารถหาได้จากความสัมพันธ์ $kx = mg \rightarrow x = \frac{mg}{k}$ ซึ่งเป็นคำตอบที่ผิด เพราะ?

..........................................................................................

ก่อนที่ท่านจะอ่านบรรทัดถัดไป อยากให้ละสายตาจากบทความนี้และลองคิดหาคำตอบ

..........................................................................................

เราอาจโต้แย้งว่าคำตอบนี้ผิดได้ด้วยเหตุผลง่าย ๆ ที่ว่าทำไมระยะ $x$ จึงไม่ขึ้นกับตำแหน่งที่ปล่อยวัตถุ (ไม่มีค่า $h$ ในคำตอบ) เพราะเราทุกคนมีประสบการณ์ตรงกันว่า ยิ่งปล่อยสูงเท่าใด สปริงก็ต้องยุบเยอะขึ้นเท่านั้น (ถ้า $h$ มาก ค่า $x$ ต้องมากตามไปด้วย)

แต่ความสัมพันธ์ $kx = mg$ ก็ไม่น่าจะผิดเพราะเมื่อแรงสมดุล วัตถุก็ควรหยุดนิ่ง.........ไม่ใช่หรือ?

ผิดครับ เมื่อแรงสมดุล วัตถุจะมีความเร่งเท่ากับศูนย์ ซึ่งแปลความหมายได้เพียงว่า ก่อนหน้าที่วัตถุจะเข้าสู่สมดุลแรงเป็นอย่างไร เมื่อเกิดสมดุลแรง วัตถุก็เพียงรักษาสภาพการเคลื่อนที่เดิมไว้ชั่วครู่ จนกว่าจะไม่เกิดสมดุลแรง ในสถานการณ์นี้ ขณะที่ก้อนมวลกำลังเคลื่อนที่ลงมา ปริมาณ $kx$ ก็กำลังเพิ่มขึ้นเข้าใกล้ค่า $mg$ เข้าไปทุกขณะ แต่แรงลัพธ์ก็ยังมีทิศลงอยู่ เมื่อเกิดเงื่อนไข $kx = mg$ ขึ้น ก้อนมวลดังกล่าว "กำลังเคลื่อนที่" อยู่ ดังนั้นก้อนมวลนี้จะไม่หยุด แต่จะยังคงเคลื่อนที่ต่อไป (รักษาสภาพเฉื่อย) ดังนั้นระยะยุบสูงสุดของสปริงจึงไม่ใช่ปริมาณ $\frac{mg}{k}$ แต่มีค่ามากกว่านี้

แล้วเราจะหาคำตอบของสถานการณ์นี้อย่างไร.............
..........................................................................................

ใช่แล้วครับ โดยสมมติว่ามีการอนุรักษ์พลังงาน โดยให้ตำแหน่งต่ำสุดของก้อนมวลเป็นตำแหน่งอ้างอิงสำหรับคำนวณพลังงานศักย์โน้มถ่วง และให้สมมติว่าเกิดการเปลี่ยนรูปพลังงานศักย์โน้มถ่วงเป็นพลังงานศักย์ยืดหยุ่นในสปริงอย่างสมบูรณ์ (ไม่เกิดพลังงานในรูปอื่นขึ้น) ซึ่งเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ว่า

$$mgh + mgx = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (1)$$

และจัดรูปเป็นสมการพหุนามกำลังสองได้ว่า

$$x^2 - \frac{2mg}{k}x - \frac{2mg}{k}h = 0 \qquad (2)$$

คำตอบของสมการดังกล่าวสามารถหาได้ไม่ยากเพราะเป็นที่ทราบกันดีว่าสมการที่มีรูป $Ax^2 + Bx + C = 0$ มีรากคำตอบเป็น $x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ ดังนั้นในสถานการณ์นี้เราจะได้ว่า

$$x = \frac{\frac{2mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{2mg}{k}\right)^2 + \frac{8mgh}{k}}}{2} = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{R} \qquad (3)$$

โดยที่เราเขียนให้

$$R = \left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k} \qquad (4)$$

เพื่อสะดวกต่อการพิจารณาในลำดับถัดไป

จากสมการ (3) จะเห็นว่าคำตอบที่ได้มีความสมมาตรรอบตำแหน่ง $x = \frac{mg}{k}$ ซึ่งเป็นตำแหน่งของสมดุลแรง และเคลื่อนที่ลงมาจากตำแหน่งดังกล่าวอีกเป็นระยะ $\sqrt{R}$ (**ข้อมูลเพิ่มเติม** สังเกตว่าค่า $R$ จากสมการ (4) จะมีค่าเป็นบวกเสมอ ดังนั้น $\sqrt{R}$ จึงมีค่าเป็นบวกเสมอ ซึ่งทำให้การพิจารณาง่ายขึ้น ในกรณีที่ $R$ น้อยกว่าศูนย์ รากที่สองของ $R$ จะกลายเป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งการพิจารณาจะยุ่งยากมากกว่านี้)

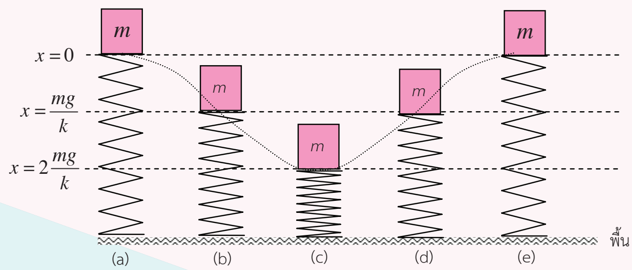
เรามาลองพิจารณาในกรณีต่อไปนี้

**กรณีที่ 1** ถ้า $h = 0$

จากสมการ (4) เราจะได้ว่า $R = \left(\frac{mg}{k}\right)^2$ ดังนั้นคำตอบของสมการ (3) ที่ได้คือ

$$x = 0 \text{ หรือ } x = \frac{2mg}{k}$$

เราสามารถบรรยายสถานการณ์ได้ดังนี้ หากเราวางก้อนมวลที่ปลายของสปริงพอดีและปล่อยให้ก้อนมวลเคลื่อนที่ลงมา เราจะได้การสั่นของก้อนมวลที่เคลื่อนที่ขึ้นลงรอบตำแหน่งสมดุลแรง ( $x = \frac{mg}{k}$ ) โดยมีแอมพลิจูดการสั่นเท่ากับ $\frac{mg}{k}$ ด้วย

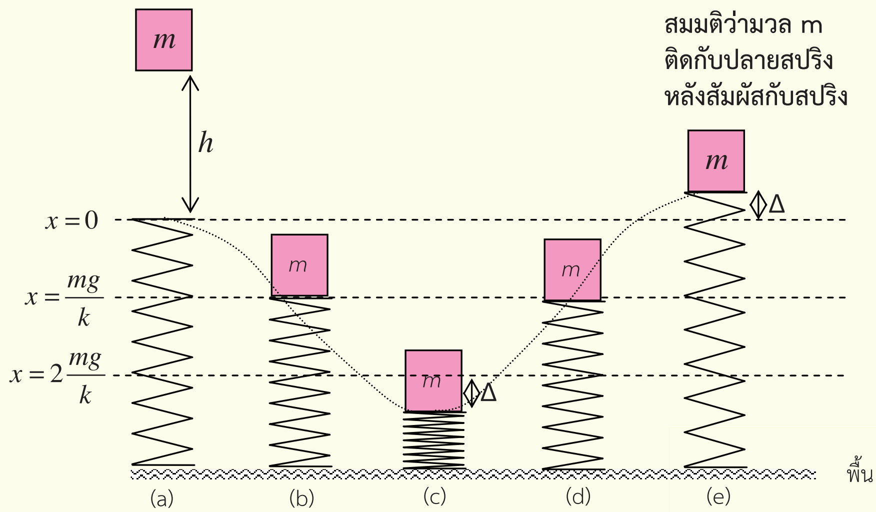



**จากรูป** (a) ปล่อยวัตถุที่ตำแหน่งปลายสปริง
(b) วัตถุกำลังเคลื่อนที่ผ่านตำแหน่งสมดุลแรง ($x=mg/k$) แต่ไม่หยุดนิ่งเพราะยังมีสภาพเฉื่อยก่อนเข้าสมดุลแรง
(c) วัตถุหยุดนิ่งที่ตำแหน่งต่ำสุด
(d) วัตถุกำลังเคลื่อนที่ขึ้นผ่านตำแหน่งสมดุล
(e) วัตถุเคลื่อนที่ขึ้นจะมาหยุด ณ ตำแหน่งที่ปล่อย (ซ้ำกับกรณี (a) นั่นเอง)

**กรณีที่ 2** ถ้า $h > 0$

การหาคำตอบของ $\sqrt{R} = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}}$ ในรูปของตัวแปรกระทำได้ค่อนข้างยาก แต่ถึงกระนั้นจากรูปคำตอบเราอาจเขียนได้ว่า $\sqrt{R} = \frac{mg}{k} + \Delta$ อย่างแน่นอน (คือ $\sqrt{R}$ จะไม่น้อยไปกว่าค่า $\frac{mg}{k}$ แน่ ๆ ) ซึ่งทำให้เราบรรยายสภาพการเคลื่อนที่ได้ว่า ถ้าปล่อยมวลสูง $h$ จากตำแหน่งปลายของสปริง และถ้าสมมติว่าก้อนมวลนั้นติดแน่นกับปลายสปริงตลอดเวลา สภาพการเคลื่อนที่จะเป็นการสั่นรอบตำแหน่งสมดุล

แรง ($x=\frac{mg}{k}$) เช่นเดิม แต่แอมพลิจูดการสั่นจะเปลี่ยนเป็น $\frac{mg}{k}+\Delta$ นั่นคือสั่นแรงขึ้นด้วยระยะ $\Delta$ ดังนั้นตำแหน่งต่ำสุดที่ก้อนมวลลงไปได้คือ $x=\frac{2mg}{k}+\Delta$ (แต่ถ้าก้อนมวลไม่ติดกับปลายสปริง ก้อนมวลก็จะเคลื่อนที่กลับมาที่ตำแหน่งที่ปล่อย)




**จากรูป** (a) ปล่อยวัตถุที่ตำแหน่งสูง $h$ จากปลายสปริง

(b) วัตถุกำลังเคลื่อนที่ผ่านตำแหน่งสมดุลแรง $x=mg/k$ แต่ไม่หยุดนิ่งที่ตำแหน่งนี้ เพราะยังมีสภาพเฉื่อยก่อนเข้าสู่สมดุลแรง

(c) วัตถุหยุดนิ่งที่ตำแหน่งต่ำสุด ซึ่งไม่ใช่ $x=mg/k$ แต่เป็นที่ตำแหน่ง $x=2mg/k+\Delta$

(d) วัตถุเคลื่อนที่ขึ้นผ่านตำแหน่งสมดุล

(e) ในกรณีที่มวลติดกับปลายสปริง มวลจะเคลื่อนที่ขึ้นไปหยุดที่ระยะยืดของสปริงเท่ากับ $\Delta$ ในกรณีที่มวลไม่ติดกับปลายสปริง มวลก้อนดังกล่าวก็จะขึ้นมาหยุดที่ตำแหน่งปล่อยในรูป (a) นั่นเอง

## สรุป

สปริงตั้งอยู่ในแนวดิ่ง มีค่านิจสปริงเป็น $k$ N/m ปล่อยก้อนมวล $m$ จากระยะสูง $h$ วัดจากปลายด้านบนของสปริง ก้อนมวล $m$ ตกลงที่ปลายสปริงและอัดสปริงลงไป สปริงจะหดสั้นมากที่สุดเป็นระยะเท่ากับ $x=\frac{mg}{k}\pm\sqrt{R}$ โดยที่ $R=\left(\frac{mg}{k}\right)^2+\frac{2mgh}{k}$

ถ้ามวลติดไปกับปลายสปริงหลังสัมผัส และเราอาจเขียน $\sqrt{R}=\frac{mg}{k}+\Delta$ เราจะได้ว่าก้อนมวลสั่นอยู่ในช่วง $x=\frac{mg}{k}\pm\left(\frac{mg}{k}+\Delta\right)$ นั่นคือเป็นการสั่นรอบ ๆ ตำแหน่ง $x=\frac{mg}{k}$ ด้วยแอมพลิจูด $\frac{mg}{k}+\Delta$